DE BEAUX GROUPES

THOMAS BLOSSIER ET AMADOR MARTIN-PIZARRO

RÉSUMÉ. Dans une belle paire (M, E) de modèles d'une théorie stable T ayant élimination des imaginaires sans la propriété de recouvrement fini, tout groupe définissable se projette, à isogénie près, sur les points E-rationnels d'un groupe définissable dans le réduit à paramètres dans E. Le noyau de cette projection est un groupe définissable dans le réduit.

Un groupe interprétable dans une paire (K, F) de corps algébriquement clos où K est une extension propre de F est, à isogénie près, l'extension des points F-rationnels d'un groupe algébrique sur F par un groupe interprétable quotient d'un groupe algébrique par les points F-rationnels d'un sous-groupe algébrique, le tout défini sur F.

ENGLISH SUMMARY

In this short paper, we characterise definable groups in a *belle paire* (M, E) of models of a stable theory T having elimination of imaginaries without the finite cover property : every definable group is (up to isogeny) the extension of the E-rational points of a group definable in the theory T over E by a group definable in T.

Furthermore, if $F \subsetneq K$ is a proper extension of algebraically closed fields, every interpretable group in the pair (K, F) is, up to isogeny, the extension of the subgroup of F-rational points of an algebraic group over F by an interpretable group which is the quotient of an algebraic group by the F-rational points of an algebraic subgroup.

INTRODUCTION

Deux corps algébriquement clos de même caractéristique p satisfont les mêmes propriétés élémentaires du premier ordre (cette collection de propriétés forme alors une *théorie complète*, notée ACF_p). Un argument de compacité classique permet, par exemple, de montrer que toute fonction polynomiale injective à plusieurs variables complexes est surjective [1]. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée, l'un des archétypes des théories *stables*, a un comportement fortement structuré : la clôture algébrique d'un sous-corps k correspond à la *clôture algébrique* modèle-théorique (l'ensemble des points à orbite fini par les automorphismes fixant k) ; la dépendance algébrique correspond à la *déviation* Shelahiste ; le fait, dû à Chevalley, que la projection d'un ensemble constructible de Zariski le reste, correspond à l'élimination de quantificateurs dans le langage des anneaux.

Date: 21 mai 2014.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45.
Key words and phrases. Model Theory, Groups, Pairs.
Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

De plus, l'existence d'un corps de définition pour chaque variété équivaut à *l'élimination des imaginaires*, ce qui permet de travailler avec des quotients, objets *interprétables* dans la théorie.

De nombreuses questions en géométrie algébrique se traduisent de façon naturelle en théorie des modèles et vice-versa. Cela a instauré une véritable interaction entre la théorie des modèles et la géométrie algébrique.

On est parfois amené à considérer des objets formels à l'intérieur de variétés algébriques. Ces objets sont fréquemment décrits à l'aide de l'algèbre différentielle. Dans le cas différentiel, les corps *différentiellement clos*, qui en caractéristique nulle ont tous la même théorie, sont l'analogue des purs corps algébriquement clos. De même, la projection d'un ensemble différentiellement constructible le reste. En revanche, un corps différentiellement clos possède un sous-corps propre algébriquement clos, constitué des éléments à dérivée nulle. Les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos ont été considérées pour elles-mêmes dans les travaux de Keisler [10], motivés par ceux de Robinson. La théorie des paires d'extensions propres de corps algébriquement clos de caractéristique fixée est complète : elle correspond à la théorie des *belles paires* de modèles de ACF_p. Plus généralement, les belles paires de structures stables ont été étudiées par Poizat [15]. Il y axiomatise leurs théories dans le cas où les structures n'ont pas la *propriété de recouvrement fini*.

Plus récemment, Delon [8] a obtenu une expansion naturelle du langage des anneaux pour l'élimination des quantificateurs des belles paires de corps algébriquement clos. Sa preuve consiste à imposer aux sous-structures d'une belle paire (M, P) d'être P-indépendantes : en effet, pour un uple P-indépendant $\bar{a}$, les formules sans quantificateur satisfaites par $\bar{a}$ (qui forment le *type sans quantificateur*) entraînent toutes les propriétés élémentaires satisfaites par $\bar{a}$, son type parital [3].

Bien que les belles paires de corps algébriquement clos soient ω-stables de rang de Morley ω [7, Example 1.5], et que la déviation y soit bien comprise [15, 3], elles n'éliminent pas les imaginaires, même *géométriquement*. En fait, une belle paire d'une théorie T élimine les imaginaires (modulo les imaginaires de T) si et seulement si aucun groupe infini n'est interprétable dans T [14].

Pillay [13] explicite une expansion du langage des belles paires de corps algébriquement clos permettant d'éliminer géométriquement les imaginaires : tout imaginaire est alors interalgébrique avec un uple d'éléments dans les (nouvelles) sortes de l'expansion.

L'étude des groupes interprétables est une question récurrente en théorie des modèles. Pour traiter cette question, la construction de groupes à partir d'un diagramme de configuration de groupes introduite par Hrushovski [9] s'avère fondamentale. Dans le cas des corps différentiels, tout groupe interprétable se plonge dans un groupe algébrique [12], ce qui est en partie conséquence du fait que la clôture algébrique d'un uple au sens différentiel correspond à la clôture algébrique corpique du corps différentiel engendré. Dans une belle paire, la clôture algébrique au sens de T d'une structure P-indépendante est algébriquement close au sens parital [14, Lemma 2.5]. Cette propriété nous sera fort utile pour décrire les groupes définissables dans toute belle paire de structures stables ainsi que les groupes interprétables dans une belle paire de corps algébriquement clos (cf. corollaire 3.6 et proposition 2.6). On se servira également des techniques utilisées dans [5] pour la classification des groupes définissables dans les mauvais corps [2].

1. Préliminaires

Les résultats cités dans ces préliminaires se trouvent dans [15, 3, 14]. Nous fixons pour toute la suite une théorie complète T stable, que l'on suppose avec élimination des quantificateurs et des imaginaires, afin de simplifier la rédaction.

Une *belle paire* de T est la donnée de $E \preceq M$, modèles de T tel que E est $|T|^+$-saturé et M réalise tout type sur $A \cup E$, où $A \subset M$ est de cardinal strictement inférieur à $|T|^+$. Puisque deux belles paires sont toujours élémentairement équivalentes dans le langage de T muni d'un nouveau prédicat P pour le sous-modèle, on notera T_P leur théorie. L'indice P fera systématiquement référence à T_P. Par exemple, si (M, E) est une belle paire, on notera $\mathrm{acl}(A)$ les éléments réels de M algébriques sur A au sens de T et $\mathrm{acl}_P(A)$ les éléments réels de M algébriques sur A au sens de la paire. De même, on utilisera les symboles $\mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }$ et $\mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^P$ pour les indépendances au sens de T et de T_P, respectivement.

Une partie A de M est dite *P-indépendante* si

$$A \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }_{E_A} E,$$

où $E_A = E \cap A = P(A)$. Deux sous-uples P-indépendants satisfaisant le même T_P-type sans quantificateurs sont élémentairement équivalents.

Un modèle $|T|^+$-saturé de T_P n'est pas forcément une belle paire. C'est le cas si et seulement si la théorie T n'a pas la propriété de recouvrement fini. Cette propriété correspond à l'existence de relations d'équivalence uniformément définissables avec un nombre fini arbitrairement grand de classes.

On suppose à partir de maintenant que la théorie T n'a pas la propriété de recouvrement fini et on se place dans un modèle (M, E) suffisamment saturé de T_P.

En particulier, la description des types pour des parties P-indépendantes ci-dessus entraîne que T_P a même spectre de stabilité que T et donc T_P est stable. Par ailleurs, puisque toute partie de E est P-indépendante, la paire n'induit pas de structure supplémentaire sur E.

À partir de [3, Remark 7.2 et Proposition 7.3] (*cf.* également [14, Fact 2.2 et Lemma 2.6]), on obtient les propriétés suivantes :

Fait 1.1. Soit A et B deux parties de M.

- La clôture algébrique $\mathrm{acl}_P(A)$ est toujours P-indépendante.
- Si A est P-indépendante, alors $A \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^P_{E_A} E$. De plus, on a $\mathrm{acl}_P(A) = \mathrm{acl}(A)$ et $E_{\mathrm{acl}_P(A)} = \mathrm{acl}(E_A) = \mathrm{acl}_P(E_A)$.
- Si A et B sont algébriquement closes au sens de la paire, alors

$$A \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^P_{A\cap B} B \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} A \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }_{A\cap B, E} B \\ \text{et} \\ E_A \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }_{E_{A\cap B}} E_B \end{cases}$$

La caractérisation de l'indépendance ci-dessus permet d'obtenir l'analogue à la propriété (†) dans [4].

Lemme 1.2. *Étant données deux parties A et B algébriquement closes au sens de la paire et indépendantes au-dessus de leur intersection, alors*

$$\mathrm{acl}_P(A, B) = \mathrm{acl}(A, B) \ \textit{et}\ E_{\mathrm{acl}_P(A,B)} = \mathrm{acl}(E_A, E_B).$$

Démonstration. Par la caractérisation précédente,

$$A \underset{A\cap B,E}{\downarrow} B, E.$$

Comme $A \downarrow_{E_A} E$, il suit par transitivité que

$$A \underset{A\cap B,E_A}{\downarrow} B, E \text{ , puis } A \underset{E_A,B}{\downarrow} E.$$

Enfin, puisque $B \underset{E_B}{\downarrow} E$, on a $B \underset{E_B,E_A}{\downarrow} E$ et donc $A, B \underset{E_A,E_B}{\downarrow} E$.
La partie $A\cup B$ est donc P-indépendante. Le fait précédent permet de conclure que $\mathrm{acl}_P(A, B) = \mathrm{acl}(A, B)$ et $E_{\mathrm{acl}_P(A,B)} = \mathrm{acl}(E_A, E_B)$. □

2. Groupes définissables dans la belle paire

Nous disposons de tous les ingrédients pour décrire les groupes définissables dans une belle paire de T. Une adaptation immédiate de [5, proposition 1.8] donne un critère suffisant pour vérifier quand un sous-groupe T_P-définissable d'un groupe T-définissable l'est aussi.

Lemme 2.1. *Soit un translaté d'un sous-groupe H connexe T_P-type-définissable d'un groupe T-type-définissable G, le tout défini sur un ensemble algébriquement clos A au sens de la paire. Soit a réalisant le générique sur A de ce translaté. Si $E_{\mathrm{acl}_P(a,A)} = E_A$, alors H est T-type-définissable.*

Démonstration. Notons tout d'abord que l'on peut supposer que a est le générique de H sur A : en effet, en prenant une deuxième réalisation a' du générique sur A du translaté de H telle que $a' \downarrow^P_A a$, on conclut que $a' \cdot a^{-1}$ (ou $a^{-1} \cdot a'$) réalise le générique de H. Comme a et a' ont le même type sur A au sens de la paire, alors $E_{\mathrm{acl}_P(a',A)} = E_A$ aussi. Par le lemme 1.2, on a $E_{\mathrm{acl}_P(a'\cdot a^{-1},A)} \subset \mathrm{acl}(E_{\mathrm{acl}_P(a,A)}, E_{\mathrm{acl}_P(a',A)}) = E_A$.

Posons p_0 le T-réduit de p et notons H_0 l'enveloppe T-définissable de H, c'est-à-dire, le plus petit sous-groupe T-type définissable de G contenant H. Par [5, proposition 1.8], l'enveloppe H_0 de H est T-connexe et égale au T-stabilisateur de p_0, qui est son unique type générique.

Il suffit maintenant de montrer que p est l'unique générique de H_0 au sens parital (au sens de T_P). D'abord, notons que tout générique parital de H_0 est une complétion de p_0, car toute T-formule générique dans H_0 au sens de T_P l'est également au sens de T et donc est contenue dans p_0.

Vérifions ensuite que, si h est un générique parital de H_0 sur A, alors $h, A \downarrow_A E$. Si $h \not\downarrow_A E$, il existe une formule $\varphi(x, e) \in \mathrm{tp}(h/A, E)$, à paramètres sur A, qui n'est pas générique dans H_0. Par [16, Lemme 5.5], on peut supposer que pour chaque uple b, la formule $\varphi(x, b)$ n'est pas générique dans H_0. Par contre, la T_P-formule $\psi(x) = \exists y P(y)\wedge\varphi(x, y)$ à paramètres dans A est réalisée par h et est donc générique dans H_0. Un nombre fini de translatés de la formule $\psi(x)$ doit recouvrir le groupe H_0 et, en prenant une extension non-déviante de p, on peut supposer que l'uple a est contenu dans $\alpha\cdot\psi(x)$ pour un certain $\alpha \in H_0$ avec $a \downarrow^P_A \alpha$. Il existe donc $e' \in E$ tel que $a \in \alpha \cdot \varphi(x, e')$. Par la caractérisation de l'indépendance, on a $a \downarrow_{A,E} \alpha$. De plus, comme $\mathrm{acl}_P(a, A)$ est P-indépendant par le fait 1.1 et $E_{\mathrm{acl}_P(a,A)} = E_A$ par hypothèse, il suit que $a, A \downarrow_{E_A} E$ et, par transitivité, $a \downarrow_A E, \alpha$. Ceci contredit que la formule $\alpha \cdot \varphi(x, e')$ n'est pas générique dans H_0.

Par transitivité, on a $h, A \perp_{E_A} E$, donc h, A est P-indépendant et $E_{\mathrm{acl}_P(h,A)} = E_{\mathrm{acl}(h,A)} = \mathrm{acl}(E_A) = E_A$. Ainsi, h, A est P-indépendant (comme a, A) et a même T_P-type sans quantificateurs que a, A, donc même T_P-type p. Le type p est par conséquent l'unique générique de H_0 au sens parital. On conclut alors que $H = H_0$ est T-type-définissable. □

Remarque 2.2. Si G est un groupe infini T-type-définissable sur E, alors le sous-groupe $H = G(E)$ des points E-rationnels de G, qui est clairement définissable dans la paire mais pas dans le réduit, ne satisfait pas les conditions du lemme.

Nous allons caractériser les groupes définissables dans la théorie de la paire, à isogénie près. Pour deux groupes type-définissables G et H, une *isogénie* de G dans H est un sous-groupe type-définissable S de $G \times H$ tel que :
- les projections G_S sur G et H_S sur H sont chacune d'indice borné ; et
- le *noyau* $\ker(S) = \{g \in G : (g, 1) \in S\}$ et le *co-noyau* $\mathrm{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ sont finis.

Une isogénie induit donc un isomorphisme entre $G_S/\ker(S)$ et $H_S/\mathrm{coker}(S)$.

Remarque 2.3. La relation d'isogénie est une relation d'équivalence. Tout groupe type-définissable est isogène à sa composante connexe. En particulier, une isogénie de la composante connexe de G dans H définit également une isogénie de G dans H et, réciproquement, une isogénie entre G et H induit une isogénie entre leurs composantes connexes.

Le résultat suivant, qui combine [5, lemme 1.2] (une généralisation de [18] au cas non abélien) et [5, lemme 1.5], sera utilisé à plusieurs reprises.

Lemme 2.4. *Soient G_1 et G_2 deux groupes type-définissables (ou même type-interprétables) dans une théorie stable. S'il existe, sur un ensemble de paramètres $C = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(C)$, des éléments a_1, b_1 de G_1 et a_2, b_2, de G_2 tels que*

(1) *a_1 et a_2, b_1 et b_2 ainsi que $a_1 \cdot b_1$ et $a_2 \cdot b_2$ sont C-interalgébriques,*

(2) *a_1, b_1 et $a_1 \cdot b_1$ sont deux à deux indépendants sur C,*

alors l'élément a_1 (resp. a_2) est générique dans un unique translaté d'un sous-groupe connexe H_1 de G_1 (resp. H_2 de G_2), le tout type-définissable sur C et il existe une isogénie entre H_1 et H_2, donnée par le stabilisateur de $\mathrm{tp}(a_1, a_2/C)$

Si dans la condition (1), on a uniquement a_2 algébrique sur C, a_1, respectivement b_2 algébrique sur C, b_1 et $a_2 \cdot b_2$ algébrique sur $C, a_1 \cdot b_1$, alors on obtient, dans la conclusion, une projection type-interprétable de H_1 sur un quotient de H_2 par un sous-groupe fini.

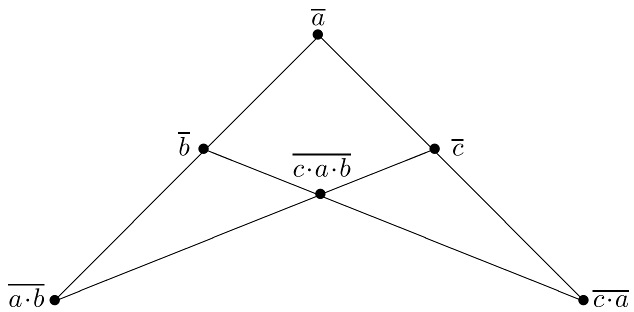
Dans les preuves qui vont suivre, nous serons amenés à considérer des groupes type-interprétables d'arité infinie. De tels groupes seront dits $*$-interprétables, cas particulier de groupes hyperdéfinissables (voir par exemple [17, Section 4.3] pour les groupes hyperdéfinissables).

Remarque 2.5. Le lemme ci-dessus se généralise au cas où les groupes G_1 et G_2 sont $*$-interprétables. De plus, si G_1 est type-définissable et G_2 est $*$-interprétable, alors, par stabilité, on obtient une isogénie (resp. une projection de même noyau), vers un groupe connexe H_2' type-interprétable, dont son générique est interalgébrique avec celui de H_2 au-dessus de C.

Proposition 2.6. *Soit T_P la théorie des belles paires d'une théorie T stable avec élimination des imaginaires sans la propriété de recouvrement fini. Tout groupe T_P-type-définissable est isogène à un sous-groupe d'un groupe T-type-définissable. De plus, tout groupe T_P-type-définissable est, à isogénie près, l'extension des points E-rationnels d'un groupe T-type-définissable sur E par un groupe T-type-définissable.*

Démonstration. Par la remarque 2.3, il suffit de considérer un groupe connexe G type-définissable dans une belle paire (M, E) sur un ensemble de paramètres. Par la suite, on travaillera au-dessus d'un sous-modèle contenant ces paramètres, que l'on omettra. Étant donnés deux génériques indépendants a et b de G, on dénotera par $\overline{a}$, $\overline{b}$ et $\overline{a{\cdot}b}$ les clôtures algébriques au sens parital des points a, b et $a \cdot b$ respectivement. Par le lemme 1.2, l'uple $\overline{a{\cdot}b}$ est T-algébrique sur $\overline{a} \cup \overline{b}$, car $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont deux sous-ensembles algébriquement clos indépendants.

À l'aide d'un troisième générique c indépendant de a et b, si l'on pose $\overline{c} = \mathrm{acl}_P(c)$, $\overline{c{\cdot}a} = \mathrm{acl}_P(c \cdot a)$ et $\overline{c{\cdot}a{\cdot}b} = \mathrm{acl}_P(c \cdot a \cdot b)$, on obtient le diagramme suivant :



Par [4, Lemme 2.1], chaque couple de points sur une droite ainsi que chaque triplet de points non colinéaires sont T-indépendants. Le théorème de configuration de groupe [9] (dont la preuve s'adapte au cas d'uples infinis) nous donne un groupe $*$-interprétable connexe au sens de T, dont le générique est T-interborné avec $\overline{a}$ et donc avec a. Par le lemme 2.4, sa remarque et l'élimination des imaginaires de T, on peut supposer, à isogénie près, que le groupe G est un sous-groupe T_P-définissable d'un groupe T-type-définissable.

Par le lemme 1.2, la partie $E_{\overline{a{\cdot}b}}$ est T-algébrique sur $E_{\overline{a}} \cup E_{\overline{b}}$. De plus, la caractérisation de l'indépendance entraîne que $E_{\overline{a}}$ et $E_{\overline{b}}$ sont T-indépendants sur $E_{\overline{a}\cap\overline{b}}$, qui correspond aux P-points du sous-modèle au-dessus duquel l'on travaille. De façon analogue, on obtient un groupe H connexe $*$-interprétable au sens de T défini sur E, tel que $E_{\overline{a}}$ est T-interalgébrique avec un T-générique h de $H(E)$, qui est également générique au sens de la paire.

La remarque 2.5 donne une projection π de G sur les points E-rationnels d'un groupe type-définissable connexe au sens de T, que l'on dénotera également par $H(E)$, dont le générique h est T_P-interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$.

La composante connexe N du noyau est un groupe T-type-définissable par le lemme 2.1 : soit n un générique de N au sens de T_P sur a. Alors $n \cdot a$ est un générique de $N \cdot a$ sur son paramètre canonique, qui est interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$. Comme $(n, 1_H)$ est dans le stabilisateur de $\mathrm{tp}_P(a, h)$, on a $(n \cdot a, h) \equiv^P (a, h)$ et en particulier $E_{\overline{a}} = \mathrm{acl}_P(h) = E_{\overline{n{\cdot}a}}$. L'hypothèse du lemme est ainsi vérifiée au-dessus de $E_{\overline{a}}$.

□

3. Groupes interprétables dans les beaux corps

Dans l'introduction, on avait remarqué qu'une belle paire d'une théorie stable T n'élimine pas les imaginaires dès qu'un groupe infini est interprétable dans T [14]. En revanche, la description des groupes définissables nous permet maintenant de caractériser les groupes interprétables dans une belle paire (de structures stables) ayant des imaginaires *modérés*, propriété qui est vérifiée par les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos, ou plus généralement, les paires propres de modèles d'une théorie fortement minimale avec $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini [13].

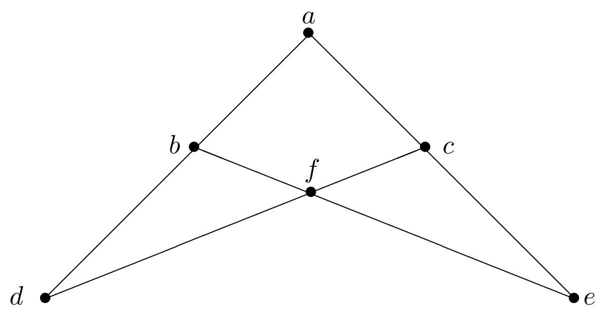
Pour l'étude de certains groupes type-interprétables dans une belle paire, nous allons d'abord, à partir d'une configuration de groupe, trouver un diagramme pour des représentants réels le plus indépendant possible.

Lemme 3.1. *Soit G un groupe type-interprétable connexe dans une théorie stable donnée, trois génériques indépendants α, β et γ de G, et un uple (réel) a_0. Si α est algébrique sur a_0, alors il existe des uples (réels) a, b, c, d, e et f tels que*

– $(a,\alpha) \equiv (b,\beta) \equiv (c,\gamma) \equiv (d,\alpha\cdot\beta) \equiv (e,\gamma\cdot\alpha) \equiv (f,\gamma\cdot\alpha\cdot\beta) \equiv (a_0,\alpha)$, *et*

– $a \underset{\alpha}{\perp\!\!\!\perp} b,c,d,e,f$ *et de même pour chaque autre point.*

En particulier, dans le diagramme suivant :



chaque triplet de points non colinéaires forme un ensemble indépendant et tout point est indépendant de toute droite ne le contenant pas.

Remarquons que a n'est pas forcément algébrique sur b,c (et de même pour tout autre triplet de points colinéaires).

Démonstration. Soient α, β et γ trois génériques indépendants de G tels que α est algébrique sur un uple a_0. En prenant successivement des réalisations d'extensions non déviantes, il existe des uples a, b et c tels que

$$(a,\alpha) \equiv (b,\beta) \equiv (c,\gamma) \equiv (a_0,\alpha)$$

et

$$a \underset{\alpha}{\perp\!\!\!\perp} \beta,\gamma \ \ , \ \ b \underset{\beta}{\perp\!\!\!\perp} a,\gamma \ \text{ et } \ c \underset{\gamma}{\perp\!\!\!\perp} a,b.$$

Vérifions que les uples a,b,c sont indépendants : comme α, β et γ sont trois génériques indépendants, on obtient par transitivité

$$a \perp\!\!\!\perp \beta,\gamma \ \ , \ \ b,\gamma \perp\!\!\!\perp a \ \text{ et } \ c \perp\!\!\!\perp a,b.$$

En particulier, on conclut par transitivité que $a \perp\!\!\!\perp b,c$ et $b \perp\!\!\!\perp a,c$.

Prenons maintenant

$$d \underset{\alpha\cdot\beta}{\perp\!\!\!\perp} a,b,c \ \ , \ \ e \underset{\gamma\cdot\alpha}{\perp\!\!\!\perp} a,b,c,d \ \text{ et } \ f \underset{\gamma\cdot\alpha\cdot\beta}{\perp\!\!\!\perp} a,b,c,d,e$$

tels que

$$(d, \alpha \cdot \beta) \equiv (e, \gamma \cdot \alpha) \equiv (f, \gamma \cdot \alpha \cdot \beta) \equiv (a_0, \alpha).$$

Montrons d'abord que chaque uple est indépendant des autres sur l'imaginaire générique correspondant, ce qui permettra de montrer que dans le diagramme précédent, tout point n'appartenant pas à une droite est indépendant de celle-ci.

Comme $\gamma \cdot \alpha \cdot \beta$ est algébrique sur a, b, c, on a $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{a,b,c,d} e$. Par transitivité, on obtient

$$e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\gamma\cdot\alpha} a, b, c, d, f.$$

Puisque $\gamma \cdot \alpha$ est algébrique sur a, c, on a $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{a,b,c} e$, ce qui donne $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\alpha\cdot\beta} a, b, c, e$.

Par l'algébricité de $\gamma \cdot \alpha \cdot \beta$ sur a, b, c, on a également $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{a,b,c,e} d$ et donc, par transitivité,

$$d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\alpha\cdot\beta} a, b, c, e, f.$$

Or, puisque $\alpha \cdot \beta$ est algébrique sur a, b, l'indépendance $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\alpha\cdot\beta} a, b, c$ donne $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{a,b} d$ et donc $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\gamma} a, b, d$.

Puisque $\gamma \cdot \alpha$ et γ sont interalgébriques sur a, de

$$e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\gamma\cdot\alpha} a, b, c, d$$

on obtient par transitivité

$$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\gamma} a, b, d, e\ ,$$

puis, comme $\gamma = \gamma \cdot \alpha \cdot \alpha^{-1}$ est algébrique sur a, e, on a $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{a,b,d,e} c$, ce qui donne

$$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\gamma} a, b, d, e, f.$$

Comme on a vérifié auparavant que les uples a, b et c sont indépendants, il suit que a et b ont un comportement symétrique à celui de c et donc que

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\alpha} b, c, d, e, f \quad \text{et } b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\beta} a, c, d, e, f.$$

Notons ainsi que tout triplet d'uples non colinéaires dans le diagramme satisfait les mêmes hypothèses d'indépendances que le triplet a, b, c au-dessus des génériques correspondants de G, qui sont indépendants. En particulier, tout triplet d'uples non colinéaires est libre.

Enfin, vérifions que tout point n'appartenant pas à une droite est indépendant de celle-ci. Par symétrie, il suffit de le montrer pour l'uple a et la droite b, e, f : on a $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{\gamma\cdot\alpha\cdot\beta} a, b, e$, d'où $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{b,e} a$. Comme $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid} b, e$, on conclut que

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid} b, e, f.$$

□

Pour un uple réel a et un ensemble (éventuellement imaginaire) A, un type $\mathrm{tp}_P(a/A)$ est presque P-interne s'il existe $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^P_A a$ tel que $a \in \mathrm{acl}_P(A, B, E)$. Notons que $\mathrm{tp}_P(a/A)$ est presque P-interne si et seulement si $\mathrm{tp}_P(\mathrm{acl}_P(A, a)/A)$ l'est. De plus, toute extension d'un type presque P-interne l'est aussi, et toute restriction non-déviante d'un type presque P-interne le reste.

Lemme 3.2. *Si* $\mathrm{tp}_P(a/A)$ *est presque* P*-interne sur l'ensemble réel* A*, alors* $a \in \mathrm{acl}(A, E)$.

Démonstration. On considère $B = \mathrm{acl}_P(B) \supset A = \mathrm{acl}_P(A)$ tel que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{P}_{A} B$ et $a \in \mathrm{acl}_P(B, E) = \mathrm{acl}(B, E)$. La caractérisation de l'indépendance donne $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A,E} B$ et donc $a \in \mathrm{acl}(A, E)$. □

Remarque 3.3. Si un générique d'un groupe G type-définissable au sens de la paire est presque P-interne, alors G est isogène aux points E-rationnels d'un groupe T-type-définissable défini sur E.

Démonstration. Si l'on travaille sur un sous-modèle M_0 contenant des représentants pour les translatés de la composante connexe de G, on en déduit que tous les génériques sont presque P-internes. Soit a une réalisation du générique principal de G sur M_0. Alors a interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$ au-dessus de M_0. On obtient ainsi dans la proposition 2.6, une isogénie entre G et le groupe $H(E)$ $*$-interprétable. On conclut par la remarque 2.5. □

Définition 3.4. Le groupe T_P-type-interprétable G est *modéré* si l'un de ses génériques α est T_P-algébrique sur un uple réel a, avec $\mathrm{tp}_P(a/\alpha)$ presque P-interne et $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{P}_{\alpha} E$.

Si un groupe est modéré, tous ses génériques (à l'aide de paramètres indépendants) satisfont la propriété ci-dessus.

Rappelons que Pillay [13] élimine géométriquement les imaginaires des belles paires de corps algébriquement clos modulo une famille explicite de sortes imaginaires. Dans son introduction, il précise que ses résultats peuvent s'étendre à toute belle paire de structures fortement minimales avec $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini. Les résultats préliminaires, plus précisément [13, Lemmata 2.2 & 2.4], qui entraînent que tout groupe type-interprétable dans une belle paire est modéré, utilisent uniquement l'élimination des imaginaires pour T ainsi que la définissabilité du rang de Morley (fini) pour T, ce qui est en particulier le cas pour une théorie fortement minimale avec $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini, comme par exemple, la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée.

Pillay montre que, pour toute belle paire (M, E) d'une théorie ω-stable T qui a élimination des imaginaires, tout imaginaire α est interalgébrique avec α', qui est lui définissable sur un uple réel a dont le type $\mathrm{tp}_P(a/\alpha')$ est (presque) P-interne, ce qui se généralise au cas où T est stable. De plus, si le rang de Morley de T est définissable, sa démonstration du Lemma 2.5 assure que a peut être choisi indépendant de E sur α'.

Nous ignorons si ce dernier fait peut se généraliser au cas où T est stable, soit pour tous les imaginaires de la paire, soit uniquement pour les génériques des groupes interprétables.

Comme la trace de tout ensemble définissable sur un sous-modèle d'une théorie stable l'est à paramètres sur le sous-modèle, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.5. *Soit* T_P *la théorie des belles paires d'une théorie* T *stable avec élimination des imaginaires sans la propriété de recouvrement fini. Tout groupe modéré* T_P*-type-interprétable* G *est, à isogénie près, l'extension des points* E*-rationnels d'un groupe* T*-type-définissable à paramètres dans* E *par un groupe* T_P*-type-interprétable*

N quotient d'un groupe T-type-définissable V par un sous-groupe distingué constitué des points E-rationnels d'un groupe T-type-définissable N' à paramètres dans E :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H(E) \longrightarrow 0$$

avec

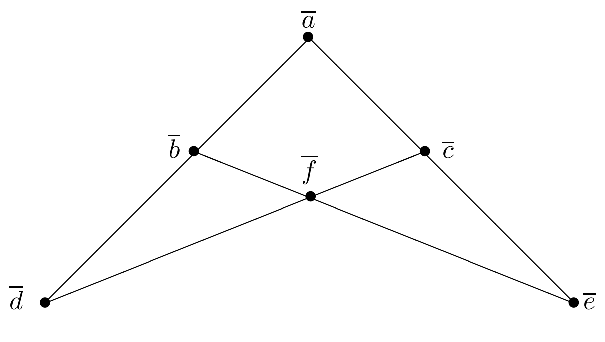
$$0 \longrightarrow N'(E) \longrightarrow V \longrightarrow N \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. Puisque la presque P-internalité est conservée par extensions non-déviantes, si un groupe T_P-type-interprétable sur un ensemble de paramètres est modéré, il le reste au-dessus d'un sous-modèle contenant ces paramètres. De même pour sa composante connexe. On travaillera donc comme auparavant au-dessus d'un sous-modèle. Par la remarque 2.3, on supposera G connexe type-interprétable dans une belle paire (M, E) sur un sous-modèle.

Soient α, β et γ trois génériques T_p-indépendants de G. Par hypothèse, le générique α de G est algébrique sur un uple réel a_0, qui est T_P-indépendant de E au-dessus de α. De plus, le type $\mathrm{tp}_P(a_0/\alpha)$ est presque P-interne. Par le lemme 3.1, il existe des uples a, b, c, d, e et f avec

$$(\alpha, a) \equiv (\beta, b) \equiv (\gamma, c) \equiv (\alpha \cdot \beta, d) \equiv (\gamma \cdot \alpha, e) \equiv (\gamma \cdot \alpha \cdot \beta, f) \equiv (\alpha, a_0),$$

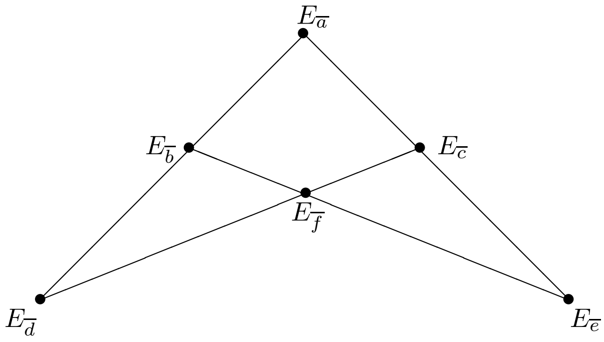
tels que, si l'on pose $\bar{a} = \mathrm{acl}_P(a)$ et de même pour les uples réels b, d, c, e, f dans le diagramme suivant :



alors tout triplet de points non colinéaires est T_P-indépendant et tout point n'appartenant pas à une droite est T_P-indépendant de celle-ci.

Comme $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{P}_{\alpha} E$, on a $E_{\overline{a}} \subset \mathrm{acl}_P(\alpha) \subset \overline{a}$, donc $E_{\overline{a}} = \mathrm{acl}_P(\alpha) \cap E$. De plus, par le lemme 1.2, comme $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{P} \overline{b}$, on a $E_{\mathrm{acl}_P(\overline{a}, \overline{b})} = \mathrm{acl}(E_{\overline{a}}, E_{\overline{b}})$. En particulier, l'ensemble $E_{\overline{d}} \subset \mathrm{acl}(E_{\overline{a}}, E_{\overline{b}})$. Ceci est aussi valable pour tout autre couple de points dans une même droite du diagramme précédent. De plus, le point $E_{\overline{a}}$ est indépendant de la droite $E_{\mathrm{acl}(\overline{b}, \overline{e})}$ et de même pour tout triplet de points non colinéaires.

La T-configuration de groupe :



donne ainsi un groupe connexe $*$-interprétable H au sens du réduit T sur E, dont un générique h de $H(E)$ est T-interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$. Comme dans le cas précédent, on peut supposer que H est type-définissable et, à isogénie près, on obtient une surjection type-définissable

$$\pi : G \to H(E).$$

Vérifions aussi que les points $\overline{a}, \overline{b}, \overline{d}, \overline{c}, \overline{e}, \overline{f}$ obtenus auparavant donnent une T-configuration de groupe sur l'ensemble de paramètres E. Tout triplet de points non colinéaires forme un ensemble indépendant. Puisque β est algébrique sur $\overline{b}$ et $\alpha \cdot \beta$ l'est sur $\overline{d}$, on a α algébrique sur b, d. De plus, par 1.2, la clôture T-algébrique $\operatorname{acl}(\overline{b}, \overline{d})$ est T_P-algébriquement close. Le type $\operatorname{tp}_P(\overline{a}/\operatorname{acl}(\overline{b}, \overline{d}))$ est aussi presque P-interne, donc l'uple $\overline{a}$ est T-algébrique sur $E, \overline{b}, \overline{d}$, par le lemme 3.2. De même pour les autres droites.

On obtient un groupe connexe $*$-interprétable W au sens du réduit T sur E et deux génériques indépendants $\overline{a}'$ et $\overline{b}'$ de W tels que $\overline{a}'$ est T-interalgébrique avec $\overline{a}$ sur E, l'élément $\overline{b}'$ est T-interalgébrique avec $\overline{b}$ sur E et $\overline{a}' \cdot \overline{b}'$ l'est avec $\overline{d}$. Comme les uples α, β et $\alpha \cdot \beta$ sont déjà algébriques sur des sous-uples finis de $\overline{a}'$, $\overline{b}'$ et $\overline{a}' \cdot \overline{b}'$, respectivement, et puisque W est une limite projective de groupes connexes type-définissables au sens du réduit T sur E, alors il existe un groupe connexe V type-définissable au sens du réduit T sur E contenant deux génériques indépendants a_1 et b_1 tels que α (resp. β, $\alpha \cdot \beta$) est algébrique sur a_1 (resp. b_1, $a_1 \cdot b_1$). Notons que a_1 est T-algébrique sur $E, \overline{a}$, et de même pour les autres points.

Comme $\overline{a}$, $\overline{b}$ et $\overline{d}$ sont deux à deux T_P-indépendants sur E, les uples a_1, b_1 et $a_1 \cdot b_1$ le sont aussi.

Puisque α est algébrique sur a et $a \mathop{\perp\!\!\!\perp}^P_{E_{\overline{a}}} E$, on conclut que $\alpha \mathop{\perp\!\!\!\perp}^P_{E_{\overline{a}}} E$. Si $N = \ker(\pi)^0$, l'élément α est générique dans $N \cdot \alpha$ sur $\operatorname{acl}(h) = E_{\overline{a}}$ et donc générique dans $N \cdot \alpha$ sur E.

Le lemme 2.4 appliqué aux paires (a_1, α) et (b_1, β) nous donne ainsi une surjection type-définissable ϕ de V sur N (à isogénie près). Il nous reste à montrer que la composante connexe N_1 de $\ker(\phi)$ est isogène aux points E-rationnels d'un groupe T-type-définissable N'. Ceci suit de la remarque 3.3 ; en effet, considérons n_1 un générique de N_1 sur E, a_1. Alors, le point $(n_1, 1_N)$ est dans le stabilisateur de $\operatorname{tp}_P(a_1, \alpha/\operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}_P(E))$, donc $n_1 \cdot a_1 \equiv^P_\alpha a_1$. Puisque $\operatorname{tp}_P(a_1/\alpha)$ est presque P-interne, car a_1 est algébrique sur E, a, alors le type $\operatorname{tp}_P(a_1/\alpha) = \operatorname{tp}_P(n_1 \cdot a_1/\alpha)$ l'est aussi. Comme α est algébrique sur E, a_1, le type $\operatorname{tp}_P(n_1/E, a_1)$ est également presque P-interne ainsi que $\operatorname{tp}_P(n_1/E)$, grâce à l'indépendance $n_1 \mathop{\perp\!\!\!\perp}^P_E a_1$. $\square$

Comme la théorie de belles paires (K, F) de corps algébriquement clos est ω-stable, tout groupe type-interprétable est interprétable. De plus, Delon montre qu'elle est modèle-complète dans une expansion naturelle du langage des anneaux [8, Corollaire 15]. En particulier, si A est une partie de K non incluse dans F et comme la clôture algébrique $\mathrm{acl}_P(A)$ est P-indépendante, cette partie A est un sous-modèle de (K, F) au sens de l'expansion et donc une sous-structure élémentaire au sens du langage de la paire, ce qui permet de montrer le résultat suivant :

Corollaire 3.6. *Tout groupe G interprétable dans une paire (K, F) de corps algébriquement clos où K est une extension propre de F est, à isogénie près, l'extension des points F-rationnels d'un groupe algébrique défini sur F par un groupe N quotient d'un groupe algébrique V par un sous-groupe distingué $N'(F)$, constitué des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur F*

$$0 \longrightarrow N(K) \longrightarrow G(K) \longrightarrow H(F) \longrightarrow 0$$

avec

$$0 \longrightarrow N'(F) \longrightarrow V(K) \longrightarrow N(K) \longrightarrow 0\,,$$

où H et N' sont des groupes algébriques définis sur F.

Si le groupe G est interprétable sur un sous-corps $k \not\subseteq F$, alors les groupes V et N obtenus le sont sur $\mathrm{acl}_P(k) \subset \overline{kF}$.

Références

[1] J. Ax, *Injective endomorphisms of varieties and schemes*, Ann. Math., **88**, 239-271 (1969).

[2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).

[3] I. Ben-Yaacov, A. Pillay, E. Vassiliev, *Lovely pairs of models*, APAL, **122**, 235–261, (2003).

[4] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, J. Europ. Math. Soc., to appear. HAL-00514393.

[5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, soumis. HAL-00758982.

[6] E. Bouscaren, *The Group Configuration–after E. Hrushovski*, dans : *The Model Theory of Groups*, 199–209, Notre Dame Math. Lectures, 11, University of Notre Dame Press (1989).

[7] S. Buechler, *Pseudoprojective Strongly Minimal Sets are Locally Projective*, JSL, **56**, 1184–1194, (1991).

[8] F. Delon, *Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos*, Confluentes Math., **4**, 1250003, 11pp (2012).

[9] E. Hrushovski,*Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).

[10] H. J. Keisler, *Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfiels*, Michigan Math. J., **11**, 71–81, (1964).

[11] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).

[12] A. Pillay, *Some foundational questions concerning differential algebraic groups*, Pacific J. Math., **179**, 179–200 (1997).

[13] A. Pillay, *Imaginaries in pairs of algebraically closed fields*, APAL, **146**, 13–20, (2007).

[14] A. Pillay, E. Vassiliev, *Imaginaries in beautiful pairs*, Illinois J. Math., **48**, 759-768 (2004).

[15] B. Poizat, *Paires de structures stables*, JSL, **48**, 239–249, (1983).

[16] B. Poizat, Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, *Nur al-Mantiq wal-Ma ́rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).

[17] F. O. Wagner, Simple Theories, Mathematics and its Applications, 503. *Kluwer Academic Publishers* (2000).

[18] M. Ziegler, *A note on generic types*, preprint, (2006) , `http://arxiv.org/abs/math/0608433`.

Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F–69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address: `blossier@math.univ-lyon1.fr`
E-mail address: `pizarro@math.univ-lyon1.fr`